第２講　整数問題

5　C を半径１の円周とし，A を C 上の１点とする．３点 P，Q，R が A を時刻 $t=0$ に出発し，C 上を各々一定の速さで，P，Q は反時計回りに，R は時計回りに，時刻 $t=2\pi$ まで動く．P，Q，R の速さは，それぞれ m，１，２であるとする．（したがって，Q は C をちょうど一周する．）ただし，m は $1 \leqq m \leqq 10$ をみたす整数である．△PQR が PR を斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さ m と時刻 t の組をすべて求めよ．

《10 東大・理科文科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

6　p, q を２つの正の整数とする．整数 a, b, c で条件

$$-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p,\ b \leqq c \leqq a$$

を満たすものを考え，このような a, b, c を $[a,\ b;\ c]$ の形に並べたものを $(p,\ q)$ パターンと呼ぶ．各 $(p,\ q)$ パターン $[a,\ b;\ c]$ に対して

$$w([a,\ b;\ c]) = p - q - (a + b)$$

とおく．

(1)　$(p,\ q)$ パターンのうち，$w([a,\ b;\ c]) = -q$ となるものの個数を求めよ．また，$w([a,\ b;\ c]) = p$ となる $(p,\ q)$ パターンの個数を求めよ．

以下 $p = q$ の場合を考える．

(2)　s を整数とする．$(p,\ p)$ パターンで $w([a,\ b;\ c]) = -p + s$ となるものの個数を求めよ．

(3)　$(p,\ p)$ パターンの総数を求めよ．

《11 東大・理科文科(文科は(2)まで)》

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

7　m を 2015 以下の正の整数とする．${}_{2015}\mathrm{C}_m$ が偶数となる最小の m を求めよ．

《15 東大・理科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

8 実数 x の小数部分を，$0 \leqq y < 1$ かつ $x - y$ が整数となる実数 y のこととし，これを記号 $\langle x \rangle$ で表す．

実数 a に対して，無限数列 $\{a_n\}$ の各項 $a_n (n=1, 2, 3, \cdots)$ を次のように順次定める．

(i) $a_1 = \langle a \rangle$

(ii) $\begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = \left\langle \dfrac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = 0 \end{cases}$

(1) $a = \sqrt{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ を求めよ．

(2) 任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\dfrac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ．

(3) a が有理数であるとする．a を整数 p と自然数 q を用いて $a = \dfrac{p}{q}$ と表すとき，q 以上のすべての自然数 n に対して，$a_n = 0$ であることを示せ．

《11 東大・理科文科(文科は(2)まで)》

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　整数問題

5　C を半径１の円周とし，A を C 上の１点とする．３点 P，Q，R が A を時刻 $t=0$ に出発し，C 上を各々一定の速さで，P，Q は反時計回りに，R は時計回りに，時刻 $t=2\pi$ まで動く．P，Q，R の速さは，それぞれ m，1，2 であるとする．（したがって，Q は C をちょうど一周する．）ただし，m は $1\leqq m\leqq 10$ をみたす整数である．△PQR が PR を斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さ m と時刻 t の組をすべて求めよ．

《10 東大・理科文科》

【答】　$(m,\ t)=\left(4,\ \dfrac{2l+1}{6}\pi\right),\ \left(8,\ \dfrac{2l'+1}{2}\pi\right)\quad (l=0,\ 1,\ \cdots,\ 5,\ l'=0,\ 1)$

【解説】　題意より，PR は円 C の直径となり，Q は PR の垂直二等分線上にあればよい．

整数 k，l を用いると，PR が円 C の直径となる条件は $mt-(-2t)=(2k+1)\pi\quad\cdots$①，Q は PR の垂直二等分線上にある条件は $t-(-2t)=\left(l+\dfrac{1}{2}\right)\pi\quad\cdots$②となる．

②より $t=\dfrac{2l+1}{6}\pi$ なので，これと $0\leqq t\leqq 2\pi$ より $0\leqq\dfrac{2l+1}{6}\pi\leqq 2\pi$.

よって $0\leqq 2l+1\leqq 12$.

これを満たすものは $l=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$.

この結果と①より $m=\dfrac{6(2k+1)}{2l+1}-2$ であるが，$l=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ のとき，$1\leqq m\leqq 10$ となる k を考えることにより

$l=0,\ 2,\ 3,\ 5$ のときは $m=4$，$l=1,\ 4$ のとき $m=4,\ 8$ を得る．

以上より，求める組は

$$\boldsymbol{(m,\ t)=\left(4,\ \frac{2l+1}{6}\pi\right),\ \left(8,\ \frac{2l'+1}{2}\pi\right)\quad (l=0,\ 1,\ \cdots,\ 5,\ l'=0,\ 1)}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

6 p，q を２つの正の整数とする．整数 a，b，c で条件

$$-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p,\ b \leqq c \leqq a$$

を満たすものを考え，このような a, b, c を $[a,\ b;\ c]$ の形に並べたものを $(p,\ q)$ パターンと呼ぶ．各 $(p,\ q)$ パターン $[a,\ b;\ c]$ に対して

$$w([a,\ b;\ c]) = p - q - (a+b)$$

とおく．

(1) $(p,\ q)$ パターンのうち，$w([a,\ b;\ c]) = -q$ となるものの個数を求めよ．また，$w([a,\ b;\ c]) = p$ となる $(p,\ q)$ パターンの個数を求めよ．

以下 $p=q$ の場合を考える．

(2) s を整数とする．$(p,\ p)$ パターンで $w([a,\ b;\ c]) = -p+s$ となるものの個数を求めよ．

(3) $(p,\ p)$ パターンの総数を求めよ．

《11 東大・理科文科(文科は(2)まで)》

【答】 (1) 順に，$p+1$，$q+1$　(2) $\begin{cases} 0 & (s \leqq -1,\ s \geqq 2p+1) \\ (p+1)(s+1) & (0 \leqq s \leqq p) \\ (p+1)(2p-s+1) & (p+1 \leqq s \leqq 2p) \end{cases}$

(3) $(p+1)^3$

【解説】 (1) $w([a,\ b;\ c]) = -q$ より $p-q-(a+b) = -q$，つまり $a+b=p$ である．このとき，$-q \leqq b \leqq 0$ かつ $0 \leqq a \leqq p$ を満たすもので，$a+b=p$ となるものは $a=p$，$b=0$ だけだから，$b \leqq c \leqq a \iff 0 \leqq c \leqq p$ を満たすものの個数は $\boldsymbol{p+1}$.

また $w([a,\ b;\ c]) = p$ より $p-q-(a+b) = p$，つまり $a+b=-q$ より同様に $a=0$，$b=-q$ なので，$b \leqq c \leqq a \iff -q \leqq c \leqq 0$ を満たすものの個数は $\boldsymbol{q+1}$.

(2) $w([a,\ b;\ c]) = -p+s$ より $-(a+b) = -p+s$，つまり $a+b = p-s$ となる．これと $-p \leqq b \leqq 0$ かつ $0 \leqq a \leqq p$ を満たすものを考える．

(Ⅰ) $p-s \geqq p+1$，$p-s \leqq -p-1$ つまり $s \leqq -1$，$s \geqq 2p+1$ のとき，$a+b=p-s$ と $-p \leqq b \leqq 0$ かつ $0 \leqq a \leqq p$ を満たすものが存在しないので，求める個数は 0.

(Ⅱ) $0 \leqq p-s \leqq p$ つまり $0 \leqq s \leqq p$ のとき，求める個数は

$$\sum_{a=p-s}^{p}(a-b+1) = \sum_{a=p-s}^{p}(2a-p+s+1) = \frac{(s+1)\{(p-s+1)+(p+s+1)\}}{2} = (p+1)(s+1).$$

(Ⅲ) $-p \leqq p-s \leqq -1$ つまり $p+1 \leqq s \leqq 2p$ のとき，求める個数は

$$\sum_{a=0}^{2p-s}(a-b+1) = \sum_{a=0}^{2p-s}(2a-p+s+1) = \frac{(2p-s+1)\{(-p+s+1)+(3p-s+1)\}}{2}$$

$$= (p+1)(2p-s+1).$$

以上より，求める個数は $\begin{cases} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{(s \leqq -1,\ s \geqq 2p+1)} \\ \boldsymbol{(p+1)(s+1)} & \boldsymbol{(0 \leqq s \leqq p)} \\ \boldsymbol{(p+1)(2p-s+1)} & \boldsymbol{(p+1 \leqq s \leqq 2p)} \end{cases}$.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　(2)の結果より，求める総数は

$$\sum_{s=0}^{p}(p+1)(s+1)+\sum_{s=p+1}^{2p}(p+1)(2p-s+1)=(p+1)\cdot\frac{1}{2}(p+1)(p+2)+(p+1)\cdot\frac{1}{2}p(p+1)$$

$$=\boldsymbol{(p+1)^3}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

7 m を 2015 以下の正の整数とする．${}_{2015}\mathrm{C}_m$ が偶数となる最小の m を求めよ．

《15 東大・理科》

【答】 $m=32$

【解説】 $1984=31\times64$，$2048=32\times64$ より 1985 から 2047 までに 64 の倍数は存在しない．

よって，1985 から 2015 までは 64 で割り切れない．

また，$2015=63\times32-1$，$1985=63\times32-31$ より $k=1,\ 2,\ \cdots,\ 31$ に対し $63\times32-k$ と k を素因数分解したときの，素因数 2 の個数は一致する．

よって ${}_{2015}\mathrm{C}_m=\dfrac{(63\times32-1)\times\cdots\times(63\times32-m)}{m\times\cdots\times1}$ において，$m=1,\ 2,\ \cdots,\ 31$ のときには，分子と分母の素因数 2 の個数は等しいので偶数になることはない．

$m=32$ のとき $63\times32-32=31\cdot64$ より

$${}_{2015}\mathrm{C}_{32}=\frac{(63\times32-1)\times\cdots\times(63\times32-31)\times31\cdot64}{32\times31\times\cdots\times1}={}_{2015}\mathrm{C}_{31}\times31\times2$$ は偶数である．

以上より，求める m の最小値は $\boldsymbol{m=32}$．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

8 実数 x の小数部分を，$0 \leqq y < 1$ かつ $x-y$ が整数となる実数 y のこととし，これを記号 $\langle x \rangle$ で表す．

実数 a に対して，無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次のように順次定める．

(i) $a_1 = \langle a \rangle$

(ii) $\begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = \left\langle \dfrac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = 0 \end{cases}$

(1) $a=\sqrt{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ を求めよ．

(2) 任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\dfrac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ．

(3) a が有理数であるとする．a を整数 p と自然数 q を用いて $a=\dfrac{p}{q}$ と表すとき，q 以上のすべての自然数 n に対して，$a_n=0$ であることを示せ．

《11 東大・理科文科(文科は(2)まで)》

【答】 (1) $a_n=\sqrt{2}-1$　(2) $a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$，$-1+\sqrt{2}$　(3) 略

【解説】 (1) $a_1=\langle\sqrt{2}\rangle$ であるが，$1<\sqrt{2}<2$ なので，$\langle\sqrt{2}\rangle=\sqrt{2}-1$，よって $a_1=\sqrt{2}-1$．

$a_1 \neq 0$ より $a_2=\left\langle\dfrac{1}{a_1}\right\rangle=\left\langle\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}\right\rangle=\langle\sqrt{2}+1\rangle$ ここで $2<\sqrt{2}+1<3$ なので

$\langle\sqrt{2}+1\rangle=\sqrt{2}-1$，よって $a_2=\sqrt{2}-1$．以下，帰納的に $a_n=\sqrt{2}-1$．

以上より，$\boldsymbol{a_n=\sqrt{2}-1\ (n \geqq 1)}$．

(2) まず 2 以上の n に対して，(ii)より $0 \leqq a_n < 1$ となるので $0 \leqq a < 1$．これと $\dfrac{1}{3}$ 以上とのことより $\dfrac{1}{3} \leqq a < 1$ よって $1 < \dfrac{1}{a} \leqq 3$ となる．

(I) $1<\dfrac{1}{a}<2$ つまり $\dfrac{1}{2}<a<1$ のとき

$a_2=\left\langle\dfrac{1}{a}\right\rangle=\dfrac{1}{a}-1$ より，これが a に等しいので $\dfrac{1}{a}-1=a \iff a^2+a-1=0$

これと $\dfrac{1}{2}<a<1$ より $a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$．このとき，帰納的に $a_n=a$ となる．

(II) $2 \leqq \dfrac{1}{a}<3$ つまり $\dfrac{1}{3}<a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$a_2=\left\langle\dfrac{1}{a}\right\rangle=\dfrac{1}{a}-2$ より，これが a に等しいので $\dfrac{1}{a}-2=a \iff a^2+2a-1=0$

これと $\dfrac{1}{3}<a \leqq \dfrac{1}{2}$ より $a=-1+\sqrt{2}$．このとき，帰納的に $a_n=a$ となる．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(Ⅲ) $\dfrac{1}{a}=3$ つまり $a=\dfrac{1}{3}$ のとき

$a_2=\left\langle\dfrac{1}{a}\right\rangle=\dfrac{1}{a}-3=0$ より，3 以上の n に対して $a_n=0$ となるので不適.

以上より，$\boldsymbol{a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\ -1+\sqrt{2}}$.

(3) p を q で割ったときの商を Q_1，余りを r_1 とすると，Q_1，r_1 は整数で

$p=qQ_1+r_1\quad(0\leqq r_1<q)$ を満たすので，$a_1=\left\langle\dfrac{qQ_1+r_1}{q}\right\rangle=\left\langle Q_1+\dfrac{r_1}{q}\right\rangle$ より $a_1=\dfrac{r_1}{q}$.

ここで，$r_1=0$ であれば，1 以上の n に対して $a_n=0$ となる.

$r_1\neq0$ のとき q を r_1 で割ったときの商を Q_2，余りを r_2 とすると，Q_2，r_2 は整数で

$q=r_1Q_2+r_2\quad(0\leqq r_2<r_1)$ を満たすので，$a_2=\left\langle\dfrac{r_1Q_2+r_2}{r_1}\right\rangle=\left\langle Q_2+\dfrac{r_2}{r_1}\right\rangle$ より $a_2=\dfrac{r_2}{r_1}$.

ここで，$r_2=0$ であれば，2 以上の n に対して $a_n=0$ となる.

以下，2 以上の自然数 k に対して $r_l\neq0\quad(l=1,\ \cdots,\ k)$ として，

r_{k-1} を r_k で割ったときの商を Q_{k+1}，余りを r_{k+1} とすると，Q_{k+1}，r_{k+1} は整数で

$r_{k-1}=r_kQ_{k+1}+r_{k+1}\quad(0\leqq r_{k+1}<r_k)$ を満たすので，

$a_{k+1}=\left\langle\dfrac{r_kQ_{k+1}+r_{k+1}}{r_k}\right\rangle=\left\langle Q_{k+1}+\dfrac{r_{k+1}}{r_k}\right\rangle$ より $a_{k+1}=\dfrac{r_{k+1}}{r_k}$.

ここで，$r_{k+1}=0$ であれば，$k+1$ 以上の n に対して $a_n=0$ となるが，$r_{k+1}\neq0$ であれば，帰納的に $q>r_1>r_2>\cdots>r_k>r_{k+1}>\cdots\geqq0$ が成り立つことになる.

ここで，q は自然数，r_1，$\cdots$，r_k，r_{k+1}，$\cdots$ は 0 以上の整数なので，0 以外の $\{r_n\}$ の個数は最高で $q-1$ 個となり，q 以上の自然数 n に対して $r_n=0$ になる.

よって q 以上の自然数 n に対して $a_n=0$ となることが示された.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。